

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Наумова Наталия Александровна
Должность: Ректор
Дата подписания: 24.10.2024 14:21:41
Уникальный программный ключ:
6b5279da4e034bffa679172803da5b7b559fc69e2

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МГОУ)

Факультет физико-математический

Кафедра вычислительной математики и методики преподавания информатики

УТВЕРЖДЕН на заседании кафедры
Протокол «21» мая 2020г. № 11

Зав. кафедрой  / Барабанова Н.Н. /

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

по дисциплине
Числовые системы

Направление подготовки
44.04.01 Педагогическое образование

Программа подготовки
Математическое образование

Мытищи
2020

Автор-составитель

кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей алгебры,
элементарной математики и методики преподавания математики

Забелина Светлана Борисовна

Фонд оценочных средств по дисциплине «Числовые системы» составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, программа подготовки «Математическое образование», утверждённого приказом МИНОБРНАУКИ РОССИИ от «22» февраля 2018 г. № 126.

Дисциплина входит в часть Блока 1 «Дисциплины (модули)», формируемую участниками образовательных отношений.

Год начала подготовки 2020

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код и наименование компетенции	Этапы формирования
СПК-2 Способен к преподаванию учебных курсов, дисциплин (модулей) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа (изучение литературы, реферат, доклад, расчетная работа)
СПК-6 Способен самостоятельно осуществлять научное исследование и применять его результаты при решении конкретных научно-исследовательских задач	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа (изучение литературы, реферат, доклад, расчетная работа)

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этап формирования	Описание показателей	Критерии оценивания	Шкала оценивания
СПК - 6	Пороговый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа (изучение литературы, реферат, доклад, расчетная работа)	Знать: общие цели и принципы построения основных числовых систем и их отражение при разработке учебно-методического обеспечения учебного курса математики в средней школе Уметь: разрабатывать учебно-методическое обеспечение учебных курсов, связанных с изучением числа	устный опрос выполнение расчетной работы; доклад	устный опрос, конспект, выполнение расчетной работы; доклад
	Продвинутый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа (изучение литературы, реферат, доклад, расчетная работа)	Знать: общие цели и принципы построения основных числовых систем и их отражение при разработке учебно-методического обеспечения учебного курса математики в средней школе, принцип расширения и его реализацию при построении конкретных числовых систем в образовательном процессе. Уметь: выполнять построения упорядоченного полукольца натуральных чисел, упорядоченного кольца целых чисел, упорядо-	устный опрос выполнение расчетной работы; реферат, доклад	устный опрос выполнение расчетной работы; реферат, доклад

			ченного поля рациональных чисел, непрерывного поля действительных чисел, поля комплексных чисел, разрабатывать учебно-методическое обеспечение учебных курсов, связанных с изучением числа применять современные образовательные технологии для демонстрации идей расширения числовых множеств Владеть: навыками вычислительной культуры		
СПК-2	Пороговый	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа (изучение литературы, реферат, доклад, расчетная работа)	Знать: основные особенности разработки учебных программ элективных курсов, связанных с числовыми системами Уметь: доказывать математические утверждения предметной области: выделять главные смысловые аспекты в доказательстве; строить простые математические модели, определять цель задачи, выбирать метод решения, проводить анализ решения, делать практические выводы и обобщения реализовывать исследовательские проекты в предметной области	устный опрос выполнение расчетной работы; доклад	устный опрос, конспект, выполнение расчетной работы; тестирование, доклад
	Продвинутый	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа (изучение литературы, реферат, доклад, расчетная работа)	Знать: формы организации самостоятельной работы обучающихся основные особенности разработки учебных программ базовых и элективных курсов, связанных с числовыми системами Уметь: доказывать математические утверждения предметной области: распознавать и анализировать ошибки в рассуждениях Владеть: навыками организации и мониторинга самостоятельной работы обучающихся по программам бакалавриата, специалитета, магистратуры и ДПП	устный опрос выполнение расчетной работы; реферат, доклад	устный опрос выполнение расчетной работы; тестирование, доклад

Критерии и шкала оценивания устного опроса

Если студент излагает материал последовательно и грамотно, делает необходимые обобщения и выводы, то ему выставляется 2 балла.

Если студент излагает материал неполно, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, при этом студент делает необходимые обобщения и выводы, то ему выставляется 1 балл.

Если студент не раскрывает основного содержания учебного материала, демонстрирует незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допускает ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые им не исправляются после нескольких замечаний преподавателя, то ему выставляется 0 баллов.

Критерии и шкала оценивания расчетной работы

Если студент правильно решил все задания и обосновал полученные результаты, то ему выставляется 10 баллов.

Если студент правильно решил все задания, но не смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 9-7 баллов (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

Если студент правильно решил 60% - 80% всех заданий, но не смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 6 баллов.

Если студент правильно решил 50% всех заданий и обосновал полученные результаты, то ему выставляется 5 баллов.

Если студент правильно решил 50% всех заданий и обосновал не все полученные результаты, то ему выставляется 4-1 балл (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

Если студент правильно решил менее 50% всех заданий и смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 1 балл.

Если студент правильно решил менее 50% всех заданий и не смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 0 баллов.

Критерии и шкала оценивания конспекта

Баллы	Критерии
2	Текст работы логически выстроен и математически грамотно изложен, ясен весь ход рассуждения. Имеются ответы на все поставленные вопросы, и они изложены научным языком, с применением терминологии, принятой в изучаемой дисциплине. Представлены доказательства необходимых теорем и следствий из них
1	Текст работы логически выстроен, математически грамотно изложен. Имеются ответы не на все поставленные вопросы, они изложены с применением терминологии, принятой в изучаемой дисциплине. Представлены доказательства не всех необходимых теорем и следствий из них.
0	Текст работы не соответствует теме или отсутствуют адекватность передачи первоисточника и доказательность материала

Критерии и шкала оценивания рефератов

Оценка	Критерии
3 балла	реферат по теме написан самостоятельно, продемонстрировано умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы
2 балла	реферат удовлетворяет требованиям на оценку в 3 балла, но при этом допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя, или допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя, или в реферате может быть недостаточно полно развернута
1 балл	неполно, непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, или студент не может применить теорию в новой ситуации
0 баллов	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя

Критерии и шкала оценивания докладов

Оценка	Критерии
5 баллов	доклад по теме составлен самостоятельно, продемонстрировано умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы
4 балла	доклад по теме удовлетворяет требованиям на оценку в 5 баллов, но при этом допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя, или допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя, или в докладе может быть недостаточно полно развернута аргументация
3 балл	неполно, непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, или студент не может применить теорию в новой ситуации
2 баллов	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание наиболее важной части учебного материала, допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые исправлены после нескольких замечаний преподавателя
1 балл	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Примерные задания расчетной работы

1. Докажите, что $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех $n \in \mathbb{N}$.
2. Доказать, что при любом натуральном n число a_n делится на b .
 $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n, b = 6$.
3. Докажите методом математической индукции: $4^{2n-1} + 1$ кратно 5 для всех $n \geq 1$.
4. Найдите сумму
 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 2018 \cdot 2018! + 2019 \cdot 2019!$
5. Доказать:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$
b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$
c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$
d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$
e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$
f) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1},$

6. Доказать:

a) $2^n > 2n + 1 \quad (n \geq 3),$
b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$
c) $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|,$
d) $2!4! \dots (2n)! > [(n+1)!]^n, \quad n \geq 2,$
e) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n > 1,$
f) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$
g) $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$

7. Вычислить радиусы r_n, R_n вписанной и описанной окружностей правильного $2n$ -угольника с периметром p .
8. Пусть даны n произвольных квадратов. Доказать, что эти квадраты могут быть разрезаны так, чтобы из получившихся частей можно было образовать квадрат.

Примерные темы рефератов

1. Общие принципы построения числовых систем.
2. Аксиоматическая теория натуральных чисел.

3. Принцип расширения числовой системы.
4. Построение кольца целых чисел.
5. Аксиоматическое построение системы целых чисел.
6. Определение системы рациональных чисел.
7. Построение поля рациональных чисел.
8. Аксиоматическое построение поля рациональных чисел.
9. Фундаментальные последовательности рациональных чисел.
10. Построение поля классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел.
11. Построение поля действительных чисел.
12. Аксиоматическое построение поля действительных чисел.
13. Определение системы комплексных чисел.
14. Построение поля комплексных чисел.
15. Аксиоматическое построение поля комплексных чисел.
16. Теорема Фробениуса.

Примерные темы докладов

1. Общие принципы построения числовых систем.
2. Аксиоматическая теория натуральных чисел.
3. Сложение натуральных чисел.
4. Умножение натуральных чисел.
5. Порядок на множестве натуральных чисел.
6. Различные формы метода математической индукции.
7. Категоричность теории Пеано.
8. Вычитание в произвольной алгебре.
9. Принцип расширения числовой системы.
10. Определение системы целых чисел.
11. Эквивалентные пары натуральных чисел.
12. Кольцо классов пар натуральных чисел.
13. Построение кольца целых чисел.
14. Порядок в кольце целых чисел.
15. Аксиоматическое построение системы целых чисел.
16. Деление в произвольной алгебре.
17. Определение системы рациональных чисел.
18. Эквивалентные дроби.
19. Поле классов дробей.
20. Построение поля рациональных чисел.
21. Строение упорядоченного поля рациональных чисел.
22. Аксиоматическое построение поля рациональных чисел.
23. Задача заполнения числовой прямой.
24. Фундаментальные последовательности рациональных чисел.
25. Сходящиеся последовательности рациональных чисел
26. Построение поля классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел.
27. Порядок в поле классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел.
28. Построение поля действительных чисел.
29. Аксиоматическое построение поля действительных чисел.
30. Определение системы комплексных чисел.
31. Поле пар действительных чисел.

32. Построение поля комплексных чисел.
33. Аксиоматическое построение поля комплексных чисел.
34. Линейные алгебры с делением над полем действительных чисел.
35. Теорема Фробениуса. Кватернионы.

Примерные вопросы к зачету

1. Полуформальные аксиоматические теории.

Опишите аксиоматический метод построения дедуктивных теорий, укажите характерные особенности полуформального аксиоматического метода. Опишите понятие модели полуформальной аксиоматической теории и приведите примеры теорий и их моделей.

2. Отношения эквивалентности. Факторизация множества.

Опишите понятие бинарного отношения на некотором множестве. Определите отношение эквивалентности на данном множестве; приведите примеры. Определите разбиение множества на классы. Сформулируйте и докажите теорему о факторизации множества с помощью отношения эквивалентности. Сформулируйте основные свойства классов эквивалентности. Определите фактор-множество данного множества по данному отношению эквивалентности, приведите примеры.

3. Отношения порядка. Упорядоченные множества.

Определите отношение порядка на некотором множестве. Определите различные виды отношений порядка путем добавления дополнительных свойств. Приведите и обоснуйте различные варианты определений отношения строгого порядка, строгого линейного порядка. Опишите понятие упорядоченного множества. Определите вполне упорядоченное множество, приведите примеры.

4. Алгебраические операции. Алгебры.

Определите бинарную алгебраическую операцию на некотором множестве; определите алгебру как алгебраическую систему. Раскройте смысл понятий: «алгебраическая операция», «операция определена на некотором множестве», «множество замкнуто относительно данной операции», приведите примеры. Определите подалгебру данной алгебры, расширение данной алгебры; раскройте смысл понятия «продолжение алгебраической операции на расширении множества». Определите полукольцо и кольцо; назовите операции, выполнимые в полукольце, кольце; сформулируйте и докажите их основные свойства. Приведите примеры коммутативных и некоммутативных полуколец и колец, полукольца и колец с единицей и без единицы. Определите поле; назовите операции, выполнимые в поле, сформулируйте и докажите их основные свойства, приведите примеры.

5. Упорядоченные алгебры.

Определите упорядоченную алгебру с двумя бинарными операциями. Сформулируйте и докажите свойства сокращения и действий в упорядоченных алгебрах. Определите положительные и отрицательные элементы упорядоченных алгебр, опишите особенности введения положительных и отрицательных элементов в упорядоченных алгебрах с нулем и без нуля. Сформулируйте и докажите критерий упорядоченного кольца, опишите проявления данного критерия в школьном курсе математики. Сформулируйте и докажите утверждение о квадрате ненулевого элемента в упорядоченном кольце.

6. Изоморфные алгебры.

Определите изоморфизм алгебр, раскройте смысл согласованности операций у изоморфных алгебр. Опишите взаимосвязь свойств соответствующих операций при изоморфизме двух алгебр. Раскройте смысл изоморфизма. Определите изоморфное вложение одной алгебры в другую. Сформулируйте теорему о продолжении изоморфизма

для алгебр с двумя бинарными операциями, опишите идею доказательства этой теоремы. Раскройте основные этапы доказательства теоремы о продолжении изоморфизма.

7. Общие принципы построения числовых систем.

Назовите практические источники возникновения понятия «число». Раскройте смысл понятия «числовая система». Укажите математические задачи, решение которых потребовало перехода от полукольца натуральных чисел к кольцу целых, а затем – к полю рациональных чисел. Укажите математические задачи, решение которых потребовало расширения поля рациональных чисел до поля действительных чисел. Укажите математические задачи, решение которых потребовало построения поля комплексных чисел как расширения поля действительных чисел. Охарактеризуйте возможности дальнейшего расширения числовых систем.

8. Аксиоматическая теория натуральных чисел.

Назовите первичные понятия полуформальной порядковой теории натуральных чисел. Сформулируйте аксиомы Пеано натурального ряда. Приведите символические записи аксиом 1–3 Пеано и их контрапозиционные варианты. Охарактеризуйте непротиворечивость и полноту теории Пеано. Для данного натурального числа определите следующее и предшествующее натуральное число. Докажите независимость каждой из аксиом Пеано от остальных.

9. Сложение натуральных чисел.

Определите операцию сложения натуральных чисел, на примере раскройте ее смысл. Сформулируйте и докажите существование и единственность сложения натуральных чисел. Сформулируйте и докажите ассоциативность и коммутативность сложения. Сформулируйте и докажите утверждения о сумме и слагаемом и о прибавлении одного числа к обеим частям равенства.

10. Умножение натуральных чисел.

Определите операцию умножения натуральных чисел, на примере раскройте ее смысл. Сформулируйте и докажите существование и единственность умножения натуральных чисел. Сформулируйте и докажите правую дистрибутивность, коммутативность и ассоциативность умножения. Сформулируйте и докажите утверждение об умножении на одно число обеих частей равенства. Опишите систему натуральных чисел как полукольцо.

11. Порядок на множестве натуральных чисел.

Сформулируйте и докажите теорему о расположении натуральных чисел. Определите отношение «меньше» на множестве натуральных чисел. Докажите, что система натуральных чисел с отношением «меньше» есть упорядоченное полукольцо, опишите следствия этого факта. Докажите, что сумма натуральных чисел больше каждого слагаемого, а произведение не меньше каждого из множителей. Сформулируйте и докажите утверждение о первом элементе множества натуральных чисел. Сформулируйте и докажите принцип Архимеда. Определите дискретное и плотное множество, сформулируйте и докажите свойство дискретности множества натуральных чисел. Сформулируйте и докажите принцип наименьшего числа, раскройте его роль в аксиоматике натурального ряда. Приведите развернутую характеристику системы натуральных чисел как упорядоченного полукольца.

12. Различные формы метода математической индукции.

Сформулируйте и докажите утверждение об обобщенной форме математической индукции. Сформулируйте и докажите утверждение об усиленной форме математической индукции. Опишите способы доказательства математических утверждений на основе описанных форм метода математической индукции.

13. Категоричность теории Пеано.

Определите категоричную теорию. Сформулируйте и докажите теорему об изоморфизме систем Пеано. Раскройте методологическую сущность категоричности системы натуральных чисел.

14. Вычитание в произвольной алгебре.

Определите разность элементов в произвольной алгебре со сложением. Определите операцию «вычитание». Докажите, что в любом кольце вычитание определено. Покажите, что если разность двух натуральных чисел существует, то она единственная. Покажите, что в полукольце натуральных чисел вычитание не определено.

15. Принцип расширения числовой системы.

Опишите ситуации, в которых возникает необходимость расширения числовой системы. Сформулируйте принцип расширения числовой системы. Объясните, смысл словосочетаний «наименьшее расширение» и «расширение однозначно с точностью до изоморфизма».

16. Определение системы целых чисел.

Обоснуйте необходимость расширения полукольца натуральных чисел и сформулируйте требования к этому расширению. Опишите идею симметризации множества натуральных чисел. Определите систему целых чисел. Сформулируйте и докажите теорему о строении множества целых чисел. Сформулируйте и докажите теорему о распадении множества целых чисел на непересекающиеся подмножества. Сформулируйте и докажите теорему о представлении целого числа в виде разности натуральных чисел.

17. Эквивалентные пары натуральных чисел.

Определите эквивалентность упорядоченных пар натуральных чисел, докажите, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Сформулируйте и докажите утверждение о прибавлении одного натурального к каждому элементу пары. Сформулируйте и докажите утверждение о парах с одинаковыми элементами. Сформулируйте и докажите утверждение о парах, первый элемент которых больше второго на 1. Сформулируйте и докажите утверждение о представителях эквивалентных пар; покажите единственность соответствующего представления. Сформулируйте и докажите утверждение о корректности действий для пар.

18. Кольцо классов пар натуральных чисел.

Определите классы эквивалентных пар натуральных чисел, сформулируйте их основные свойства. Определите операции сложения и умножения классов пар натуральных чисел, обоснуйте корректность этих определений. Докажите, что множество всех классов пар образует коммутативное кольцо с единицей относительно операций сложения и умножения классов.

19. Построение кольца целых чисел.

Опишите всевозможные виды классов пар натуральных чисел. Выделите в построенном кольце подалгебру. Установите изоморфизм между полукольцом натуральных чисел и подалгеброй. Постройте кольцо $\mathbb{Z}$ с помощью теоремы о продолжении изоморфизма, опишите все этапы этого построения. Покажите, что построенное кольцо $\mathbb{Z}$ удовлетворяет критерию кольца целых чисел. Укажите основные классы, на которые разбивается множество целых чисел. Опишите целые числа 0 и 1 и покажите, что $0 \neq 1$. Докажите, что в кольце целых чисел нет делителей нуля; объясните смысл этого факта.

20. Порядок в кольце целых чисел.

Определите отношения «меньше» на множестве целых чисел; покажите, что они являются продолжениями соответствующих отношений между натуральными числами. Покажите, как соотносятся с нулем натуральные числа и числа, противоположные натуральным. Докажите, что кольцо целых чисел упорядочено отношением «меньше», укажите основные следствия из этого факта. Сформулируйте и докажите принцип

Архимеда для кольца целых чисел; объясните его смысл. Докажите дискретность множества целых чисел. Покажите, что множество целых чисел не вполне упорядочено отношением «меньше». Приведите развернутую характеристику системы целых чисел как упорядоченного кольца.

21. Аксиоматическое построение системы целых чисел.

Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории целых чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории целых чисел; раскройте их содержательный смысл. Покажите, что с помощью данной аксиоматики система целых чисел определяется как минимальное кольцо, являющееся расширением полукольца натуральных чисел. Раскройте связь конструктивно построенных колец и $\mathbb{Z}$ с аксиоматической теорией целых чисел. Сформулируйте и докажите теорему о категоричности теории целых чисел; объясните смысл этого факта.

22. Деление в произвольной алгебре.

Определите частное элементов в алгебре с умножением. Определите операцию «деление». Докажите, что в любом поле деление определено. Покажите, что если частное двух целых чисел существует, то оно единственное. Покажите, что в кольце целых чисел деление не определено.

23. Определение системы рациональных чисел.

Обоснуйте необходимость расширения кольца целых чисел и сформулируйте требования к этому расширению. Опишите идею расширения множества целых чисел. Определите систему рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о строении множества рациональных чисел.

24. Эквивалентные дроби.

Определите эквивалентность дробей (упорядоченных пар целых чисел, второй элемент которых отличен от 0). Докажите, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Сформулируйте и докажите основное свойство дроби. Сформулируйте и докажите утверждение о стандартных представителях эквивалентных дробей; покажите единственность соответствующего представления. Сформулируйте и докажите утверждение о дробях с числителем, равным 0. Сформулируйте и докажите утверждение о дробях с равными числителем и знаменателем. Сформулируйте и докажите утверждение о корректности действий для дробей.

25. Поле классов дробей.

Определите классы эквивалентных пар дробей, сформулируйте их основные свойства. Определите операции сложения и умножения классов дробей, обоснуйте корректность этих определений. Докажите, что множество всех классов дробей образует поле относительно операций сложения и умножения классов.

26. Построение поля рациональных чисел.

Опишите всевозможные виды классов дробей. Выделите в поле подалгебру $\mathbb{Z}$. Установите изоморфизм между кольцом целых чисел и алгеброй $\mathbb{Z}$. Постройте поле $\mathbb{Q}$ с помощью теоремы о продолжении изоморфизма; опишите все этапы этого построения. Покажите, что построенное поле удовлетворяет критерию поля рациональных чисел. Укажите основные классы, на которые разбивается множество рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о представлении рациональных чисел в виде несократимых дробей.

27. Строение упорядоченного поля рациональных чисел.

Определите отношения и «меньше» на множестве рациональных чисел; покажите, что они являются продолжениями соответствующих отношений между целыми числами. Докажите, что поле рациональных чисел упорядочено отношением «меньше», укажите основные следствия из этого факта. Сформулируйте и докажите принцип Архимеда для поля рациональных чисел; объясните его смысл. Докажите плотность множества рациональных чисел. Покажите, что множество рациональных чисел не вполне

упорядочено отношением "меньше". Приведите развернутую характеристику системы рациональных чисел как упорядоченного поля.

28. Аксиоматическое построение поля рациональных чисел.

Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории рациональных чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории рациональных чисел, раскройте их содержательный смысл. Покажите, что с помощью данной аксиоматики система рациональных чисел определяется как минимальное поле, являющееся расширением кольца целых чисел. Раскройте связь конструктивно построенных полей с аксиоматической теорией рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о категоричности теории рациональных чисел.

29. Задача заполнения числовой прямой.

Покажите, что не всякой точке координатной прямой соответствует рациональное число, исходя из этого, опишите вид «рациональной прямой». Раскройте идею пополнения "рациональной прямой", охарактеризуйте роль принципов Архимеда и Кантора в этом процессе. В соответствии с принципом расширения числовой системы, определите поле действительных чисел как непрерывное поле.

30. Фундаментальные последовательности рациональных чисел.

Определите фундаментальную последовательность (ФП) рациональных чисел. Докажите ограниченность любой ФП рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о сумме и произведении ФП рациональных чисел.

31. Сходящиеся последовательности рациональных чисел

Определите сходящуюся последовательность рациональных чисел и ее предел. Докажите, что всякая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к рациональному пределу, является фундаментальной. Покажите с помощью контрпримера, что не всякая ФП рациональных чисел сходится к рациональному пределу.

32. Эквивалентные фундаментальные последовательности рациональных чисел.

Сформулируйте определение эквивалентных ФП рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теоремы, связывающие эквивалентность ФП с их пределами. Сформулируйте и докажите теорему о ФП, полученной из данной ФП отбрасыванием конечного числа первых членов. Докажите рефлексивность, симметричность и транзитивность введенного отношения. Сформулируйте и докажите утверждение о двух ФП, отличающихся только конечным числом членов.

33. Стационарные фундаментальные последовательности рациональных чисел. Определите стационарную ФП рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о представителе сходящейся ФП рациональных чисел.

34. Нулевые и ненулевые фундаментальные последовательности рациональных чисел. Определите нулевую и ненулевую ФП. Сформулируйте и докажите теорему об умножении ФП на нулевую последовательность. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности снизу ненулевой ФП. Сформулируйте и докажите следствие об отбрасывании нулей в ненулевой ФП.

35. Построение поля классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Определите классы эквивалентных ФП рациональных чисел и укажите основные свойства этих классов. Сформулируйте и докажите утверждение о корректности сложения и умножения классов ФП "по представителям". Определите сумму и произведение классов ФП. Докажите, что множество классов ФП рациональных чисел является полем относительно введенных операций. Укажите нейтральные элементы по сложению и умножению в построенном поле, а также элементы, противоположные и обратные элементам данного поля.

36. Порядок в поле классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о расположении ФП. Сформулируйте и докажите утверждение о корректности введения порядка во множестве классов ФП.

Докажите, что поле классов $\Phi\mathbb{P}$ рациональных чисел упорядочено введенным отношением.

37. Построение поля действительных чисел.

Опишите всевозможные виды $\Phi\mathbb{P}$ рациональных чисел. Выделите в упорядоченном поле $\mathbb{R}$ подалгебру $\mathbb{Q}$. Установите изоморфизм между упорядоченным полем рациональных чисел и подалгеброй $\mathbb{Q}$. Постройте поле с помощью теоремы о продолжении изоморфизма; опишите все этапы этого построения. Докажите архимедовскую упорядоченность поля. Сформулируйте и докажите лемму о рациональных приближениях в поле. Докажите полноту поля. Обоснуйте вывод о том, что поле является полем действительных чисел.

38. Аксиоматическое построение поля действительных чисел.

Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории действительных чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории действительных чисел. Покажите, что с помощью данной аксиоматики система действительных чисел определяется как непрерывное упорядоченное поле. Обоснуйте категоричность теории действительных чисел.

39. Определение системы комплексных чисел.

Обоснуйте необходимость расширения поля действительных чисел и сформулируйте требования к этому расширению. Определите систему комплексных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о стандартном виде комплексного числа.

40. Поле пар действительных чисел.

Определите операции сложения и умножения пар действительных чисел. Докажите, что множество $\mathbb{C}$ пар действительных чисел образует поле относительно введенных операций сложения и умножения. Укажите нейтральные элементы по сложению и умножению в построенном поле, а также элементы, противоположные и обратные элементам данного поля.

41. Построение поля комплексных чисел.

Опишите всевозможные виды пар действительных чисел. Выделите в поле $\mathbb{C}$ подалгебру $\mathbb{R}$. Установите изоморфизм между полем действительных чисел и подалгеброй $\mathbb{R}$. Постройте поле с помощью теоремы о продолжении изоморфизма; опишите все этапы этого построения. Укажите "мнимую единицу" в поле. Покажите, что построенное поле $\mathbb{C}$ является полем комплексных чисел (удовлетворяет теореме о стандартном виде комплексного числа). Покажите, что поле комплексных чисел нельзя упорядочить.

42. Аксиоматическое построение поля комплексных чисел.

Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории комплексных чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории комплексных чисел; опишите различные модели этой теории. Покажите категоричность теории комплексных чисел. Объясните, почему идея решения целых алгебраических уравнений не может служить основной для дальнейшего расширения числовых систем.

43. Линейные алгебры с делением над полем действительных чисел.

Определите линейную алгебру над произвольным полем. Определите линейную алгебру с делением над произвольным полем. Приведите примеры алгебр с делением над полем действительных чисел и укажите их размерность. Определите систему кватернионов как линейную алгебру с делением размерности 4 над полем действительных чисел.

44. Теорема Фробениуса.

Перечислите известные ассоциативные алгебры с делением над полем действительных чисел, укажите их размерность. Сформулируйте теорему Фробениуса. Раскройте смысл теоремы Фробениуса и ее роль в решении задачи последовательного расширения числовых систем.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Основными формами контроля являются устные опросы студентов во время аудиторных занятий, выполнение расчетной работы, написание конспектов, реферата, заслушивание докладов. Для проведения промежуточного контроля разработаны вопросы к зачету. По текущему контролю успеваемости необходимо выполнить расчетную работу, написать конспекты, реферат, успешно выступить с докладом на практическом занятии.

Объектами оценивания выступают:

1. Продукт практической деятельности студента.
2. Процесс практической деятельности студента.

При этом оценивается соответствие усвоенных алгоритмов деятельности заданному стандартному эталону деятельности. Критерии оценки основываются на поэтапном контроле процесса выполнения задания.

3. Усвоенный объем профессионально значимой информации.

Итоговая оценка знаний, умений, способов деятельности студентов по изучаемой дисциплине составляет 100 баллов по следующей схеме:

	Оценка по 100-бальной системе
зачтено	81 — 100
	61 — 80
	41 — 60
не зачтено	0 — 40

Общая оценка (100 баллов) складывается из оценки за текущую успеваемость (84 баллов), и оценки за зачет (16 баллов)

- 1) Посещение занятия - 2 балла, активность на занятии (устный опрос) – 2 балла.

Всего – 32 балла по числу занятий (лекционные (4 часа) и практические занятия (12 часов)).

- 2) Расчетная работа - 10 баллов

- 3) Реферат -3 балла

- 4) Доклад – 5 баллов

Всего – 25 баллов

- 5) Конспект – 2 балла

Всего - 14 баллов

- 6) Зачет-16 баллов

Критерии и шкала оценивания ответов студентов на зачете

Количество баллов		Критерии оценивания
зачтено	15-16	Если студент свободно ориентируется в теоретическом материале, знает формулировки основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач
	6-14	Если студент недостаточно свободно ориентируется в теоретическом материале, ошибается при формулировании основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

незачтено	3-5	Если студент плохо ориентируется в теоретическом материале, не знает некоторые формулировки основных определений, теорем и свойств, у студента возникают проблемы при применении теоретических сведений для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).
	0-2	Если студент не ориентируется в теоретическом материале, не знает большинство формулировок основных определений, теорем и свойств и не умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).